

Лема на Урисон

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

18 декември 2019

Изложението е до голяма степен базирано на [2] и [1].

Определение. Нека (X, τ) е топологично пространство и $A, B \subseteq X$. Казваме, че

- A и B са отделими, ако $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.
- A и B са отделими с околности, ако съществуват дизюнктни отворени множества U и V , съдържащи съответно A и B .
- A и B са отделими с непрекъснатата функция, ако съществува непрекъснатата функция $f : X \rightarrow [0, 1]$, за която $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$.
- A е нулево, ако съществува непрекъснатата функция $f : X \rightarrow [0, 1]$, за която $f^{-1}(0) = A$.
- A е конулево, ако $X \setminus A$ е нулево.

Определение. Нека (X, τ) е топологично пространство. Казваме, че

- (X, τ) е нормално пространство, ако всеки две дизюнктни затворени подмножества на X са отделими с околности. Нормалните T_1 -пространства се наричат T_4 -пространства.
- (X, τ) е наследствено нормално пространство, ако всички негови подмножества са нормални. Наследствено нормалните T_1 -пространства се наричат T_5 -пространства.
- (X, τ) е съвършено нормално пространство, ако всяко затворено подмножество на X е нулево. Съвършено нормалните T_1 -пространства се наричат T_6 -пространства.

Твърдение 1. Ако (X, τ) е T_5 -пространство, то е и T_4 -пространство.

Лема 2 (Малка лема на Урисон). *Топологичното пространство (X, τ) е нормално точно тогава, когато за всяко затворено подмножество F и за всяка негова околност U съществува отворено множество V , така че $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Доказателство. ($\implies$) Нека X е нормално, F е затворено и U е околност на F . Тогава $F \cap (X \setminus U) = \emptyset$ и съществуват дизюнктни околности V и W , съответно на F и $X \setminus U$, при това

$$F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U,$$

където $\bar{V} \subseteq X \setminus W$, тъй като $X \setminus W$ е затворено и съдържа V .

($\impliedby$) Нека F и G са затворени подмножества на X . Тогава съществува околност V на F , за която

$$F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus G.$$

Но това означава, че V е околност на F и $W := X \setminus \bar{V}$ е околност на G , при това $V \cap W = \emptyset$. Следователно X е нормално пространство. $\square$

Лема 3 (Голяма лема на Урисон). *Топологичното пространство (X, τ) е нормално точно тогава, когато всеки две затворено подмножества на X на отделими с непрекъсната функция.*

Доказателство. ($\implies$) Нека F и G са затворени подмножества на X . Полагаме $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. На всяко рационално число $r \in \mathbb{Q}_1$ ще съпоставим околност U_r , така че

$$r, s \in \mathbb{Q}_1, r < s \implies \bar{U}_r \subseteq U_s. \quad (1)$$

Нека $r_1 := 0, r_2 := 1$ и нека $r_3, r_4, \dots$ е номерацията от всички рационални числа в интервала $(0, 1)$. Ще построим редица от околности $\{U_{r_k}\}_{k=1}^\infty$ индуктивно, т.е. за всички индекси $k, l \leq n$,

$$r_k < r_l \implies \bar{U}_{r_k} \subseteq U_{r_l}. \quad (2)$$

Полагаме $U_1 := X \setminus B$. Понеже пространството X е нормално, лема 2 ни дава отворено множество U_0 , така че $A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq U_1$.

Така (2) е изпълнено за $n = 2$.

Нека сега (2) е изпълнено за всички числа, по-малки от n . Полагаме

$$\begin{aligned} k &:= \max\{r_m \mid m < n \text{ \& } r_m < r_n\}, \\ l &:= \min\{r_m \mid m < n \text{ \& } r_m > r_n\} \end{aligned}$$

и лема 2 ни дава отворено множество U_n , така че $U_k \subseteq U_n \subseteq \bar{U}_n \subseteq U_l$. С това индукцията е завършена.

По този начин на всяко число от $\mathbb{Q}_1$ съпоставихме околност U_r , така че да е изпълнено (1).

Остава да дефинираме непрекъсната функция $f : X \rightarrow [0, 1]$, която да отделя F от G . Полагаме

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in B, \\ \inf\{r \in \mathbb{Q}_1 \mid x \in U_r\}, & x \notin B. \end{cases}$$

Очевидно $f(B) = 1$ и $f(A) \subseteq f(U_0) = 0$. За да докажем, че функцията f е непрекъсната, ще докажем, че праобразите на отворените интервали от вида $[0, r)$ и $(r, 1]$, които образуват предбаза за стандартната топология в $[0, 1]$, са отворени.

Нека $r \in (0, 1)$. Разглеждаме първо множеството

$$f^{-1}([0, r)) = \{x \in X \mid f(x) < r\}.$$

Ще докажем, че $x \in f^{-1}([0, r)) \iff \exists s \in \mathbb{Q} \cap [0, r) : x \in U_s$.

Ако $x \in U_s$ за някое рационално $s < r$, то $f(x) < r$ и $x \in f^{-1}([0, r))$.

Нека сега $x \in f^{-1}([0, r))$. Тогава непременно съществува някое рационално $s < r$, за което $x \in U_s$, защото иначе бихме имали $\forall s \in \mathbb{Q} \cap [0, r), f(x) > s$ и в частност $f(x) \geq r$, което е в противоречие с $f(x) < r$.

Тогава

$$f^{-1}([0, r)) = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0, r)} U_s,$$

което е обединение на отворени множества и, следователно, е отворено.

Разглеждаме

$$f^{-1}((r, 1]) = \{x \in X \mid f(x) > r\}.$$

Ще докажем първо, че $x \in f^{-1}((r, 1]) \iff \exists s \in \mathbb{Q} \cap (r, 1] : x \notin U_s$.

Ако $x \notin U_s$ за някое рационално $s > r$, то $\overline{U}_{s'} \subseteq U_s$ и $x \notin \overline{U}_{s'}$ за произволно рационално $s' \in (r, s)$ и следователно $f(x) \geq s > r$ и $x \in f^{-1}((r, 1])$.

Нека $x \in f^{-1}((r, 1])$. Допускаме, че $\forall s \in \mathbb{Q} \cap (r, 1], x \in U_s$. Но тогава $f(x) \leq r$, което противоречи с $f(x) > r$.

Остава да докажем, че $\exists s \in \mathbb{Q} \cap (r, 1] : x \notin U_s \iff \exists s' \in \mathbb{Q} \cap (r, 1] : x \notin \overline{U}_{s'}$.

Нека $\exists s \in \mathbb{Q} \cap (r, 1] : x \notin U_s$. Тогава по построение $\exists s' \in (r, s) : \overline{U}_{s'} \subseteq U_s$.

Обратно, ако $\exists s' \in \mathbb{Q} \cap (r, 1] : x \notin \overline{U}_{s'}$, очевидно $x \notin U_{s'}$.

Тогава

$$f^{-1}((r, 1]) = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap (r, 1]} (X \setminus \overline{U}_s),$$

което е сечение на отворени множества и, следователно, е отворено.

И в двата случая праобразите са отворени, следователно f е непрекъсната.

($\Leftarrow$) Нека F и G са затворени подмножества на X и $f : X \rightarrow [0, 1]$ е непрекъсната функция, която ги отделя. Тогава $f^{-1}([0, 1/2))$ и $f^{-1}((1/2, 1])$ са дизюнктни околности за F и G и следователно пространството X е нормално. $\square$

Следствие 4. Всяко T_4 -пространство е и $T_{3\frac{1}{2}}$ -пространство.

Доказателство. Нека (X, τ) е T_4 -пространство, $F \subseteq X$ е затворено и $x \notin F$. Тогава, понеже X е T_1 -пространство, множеството $\{x\}$ е затворено и по лема 3 множествата F и $\{x\}$ са отделими с непрекъсната функция. $\square$

Твърдение 5. Нека (X, τ) е нормално пространство и $F \subseteq X$. Тогава F е нулево множество точно тогава, когато е затворено F_δ -множество.

Доказателство. ($\Rightarrow$) Имаме, че $F = f^{-1}(0)$. Понеже множеството $\{0\}$ е затворено в $[0, 1]$, имаме, че и F е затворено. Освен това

$$F = f^{-1}(0) = f^{-1} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^{>0}} \left[0, \frac{1}{n} \right) \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^{>0}} f^{-1} \left(\left[0, \frac{1}{n} \right) \right).$$

Тъй като множествата от вида $[0, \frac{1}{n})$ са отворени в $[0, 1]$, имаме, че F е G_δ множество.

($\Leftarrow$) Нека F е затворено G_δ -множество. Тогава $X \setminus F$ е F_σ -множество и съществуват затворени множества $F_1, F_2, \dots$, така че $X \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

За всяко $k = 1, 2, \dots$ лемата на Урисон ни дава непрекъсната функция $f_k : X \rightarrow [0, 1]$, която да отделя F и F_k . Построяваме функцията

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k(x).$$

По построение f е непрекъсната и

$$f(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 0 = 0.$$

Нека сега $x \notin F$. Тогава x се съдържа в поне едно F_n и

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k(x) + \frac{1}{2^n} > 0,$$

следователно $f(x) = 0 \iff x \in F$, тоест F е нулево. $\square$

Следствие 6. Нека (X, τ) е нормално пространство и $U \in \tau$. Тогава U е отворено F_σ -множество точно тогава, когато е конулево.

Следствие 7. В напълно нормално пространство всяко затворено множество е G_δ -множество и всяко отворено множество е F_σ -множество.

Твърдение 8. Ако (X, τ) е свършено нормално пространство, то е наследствено нормално.

1. Литература

- [1] Георги Димов (лекции), Елза Иванова-Димова (упражнения) и Янис Василев (записки). Записки от лекции и упражнения по обща топология. 2019-2020. URL: <https://ivasilev.net/%D0%A4%D0%9C%D0%98/%D0%9E%D0%A2/> (дата на посещ. 17.12.2019).
- [2] Ryszard Engelking. General Topology. Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3885380064.